Accroissements Finis - Etude de Fonctions

Accroissements Finis

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h > 0$, la tangente au point d'abscisse $x + \frac{1}{2}h$ est parallèle à la corde joignant les points d'abscisse x et $x + h$.

Prouver que f est un polynôme de degré au plus 2.

Exercice 2. Soit f deux fois dérivable sur $[a, b]$, telle que $f^{(3)}$ existe sur $]a, b[$. Montrer que :

$$\exists c \in]a, b[, \qquad f(b) = f(a) + \frac{b-a}{2}(f'(a) + f'(b)) - \frac{(b-a)^3}{12} f^{(3)}(c)$$

Exercice 3. Soit f dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, continue sur $[a, b]$ et telle que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il exite une tangente à la courbe représentative de f qui passe par l'origine . On pourra introduire la fonction g définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 4. Soit P un polynôme réel ayant n racines réelles distinctes. Montrer que P' en a au moins $n - 1$.

Exercice 5. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que $a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$. Montrer qu'il existe un élément $x \in]0, 1[$ tel que $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$.

Exercice 6. Soit f une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que f' est croisante et $f(0) = 0$.

a) En utilisant le théorème des accroissemnts finis, montrer que $\forall x > 0,\ f(x) \leq x f'(x)$.

b) En déduire que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est croissante.

Exercice 7. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f'(0) = -1$. Montrer que

a) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = -1$.

b) Il existe $x_1 \in]0, 1[$ tel que $f(x_1) < 0$.

c) Il existe $x_2 \in]0, 1[$ tel que $f(x_2) = 0$.

d) Il existe $x_3 \in]0, 1[$ tel que $f'(x_3) = 0$.

Exercice 8. Soient f et g deux fonctions définies et continues sur $[0, 1]$ dérivables sur $]0, 1[$ et telles que :

$$f(0) = g(0) \quad \text{et} \quad f(1) = g(1)$$

a) Montrer que $\exists c \in [0, 1],\ h'(c) = 0$ où $h = f - g$.

b) En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que f et $g + \lambda$ sont tangentes.

Exercice 9. Soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $]0,1[$.
On suppose que $f(x)$ et $xf'(x)$ admettent des limites finies en 0. Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} xf(x) = 0$$

Exercice 10. Soit $a \in \mathbb{R}$, $f : [a,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue et drivable sur $[a,+\infty[$

a) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

b) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

c) Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = l > 0 \Longrightarrow \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l \quad \text{et} \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \right)$$

d) Les réciproques sont-elles vraies ?

Exercice 11. [Règle de l'Hospital]
Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables sur l'intervalle $I = \langle\alpha,\beta\rangle$. Soit $\lambda \in [\alpha,\beta]$ (éventuellement infini).
On suppose que $\forall t \in I \setminus \{\lambda\}$, $g(t) \neq 0$ et $g'(t) \neq 0$. Montrer que :

$$\left.\begin{array}{rcl} \lim_{x\to\lambda} f(x) & = & 0 \\ \lim_{x\to\lambda} g(x) & = & 0 \\ \lim_{x\to\lambda} \frac{f'(x)}{g'(x)} & = & L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to\lambda} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Où $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Exercice 12. En utilisant le théorème des accroissements finis et en distinguant éventuellement les cas $x > 0$ et $x < 0$ démontrer que

a) pour tout réel x on a $e^x \geq 1 + x$;

b) pour tout $x > -1$ on a $\ln(1 + x) \leq x$.

Exercice 13. A l'aide du théorème des accroissements finis montrer que

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad |\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ et $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$.

b) $\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, puis calculer $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln x)$ et $\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$. En déduire que $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

c) Calculer $\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$.

Exercice 14. A l'aide du théorème des accroissements finis, calculer $\lim_{x\to\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}\right)$.

Exercice 15.

a) Montrer qu'il existe un unique réel l tel que $\cos(l) = l$. En déduire que $0 \leq l \leq 1$.
Soit u, la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos(u_0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

c) Monter que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - l| \leq \sin(1)|u_n - l|$.

d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| \leq (\sin(1))^n |u_0 - l|$.

e) En déduire que u converge vers l.

Etude de Fonctions

Exercice 16. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\exists C > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^2$$

Montrer que f est constante.

Exercice 17. Étudier le sens de variation des fonctions f et g définies sur $[0, \pi/2[$ par $f(x) = \tan x - x$ et $g(x) = \tan x - x - \frac{x^3}{3}$. En déduire que l'on a $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$ si $x \in]0, \pi/2[$.

Exercice 18.

a) Montrer que l'on a

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad x\cos(x) - \sin(x) < 0$$

b) Etudier le sens de variation de la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.

c) Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a < b < \pi$. Montrer que l'on a $\frac{a}{b} < \frac{\sin(a)}{\sin(b)}$.

Exercice 19. On considère les fonctions $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et $g(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$.

a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f et de g. Calculer f' et g' et en déduire les variations de f et de g. Donner les extrema locaux de f et de g. Y a-t-il des extrema globaux ?

b) Trouver les asymptotes aux graphes de f et de g.

c) Déterminer les intervalles où les fonctions f et g sont convexes ou concaves et leurs points d'inflexion.

d) Tracer les graphes de f et de g.

Exercice 20. Etudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 21.

a) Montrer que l'on a $x\cos x - \sin x < 0$ si $x \in]0, \pi[$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ sur l'intervalle $]0, \pi]$.

c) Démontrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\frac{2x}{\pi} < \sin x < x$.

Exercice 22. Soit $p \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la fonction $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{(1+x)^p}{1+x^p}$ a pour maximum 2^{p-1}.

b) Soient a et b deux réels positifs. Montrer que l'on a :

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

Exercice 23. Etudier les fonctions suivantes et tracer leurs courbes représentatives :

$$g(x) = x^x \qquad h(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right) \qquad f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

Exercice 24. Construire le graphe des fonctions suivantes :

$$f_{0,1}(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \qquad f_{m,\sigma}(x) = \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

où m et σ sont deux réels fixés. Préciser les points d'inflexion.